Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

Niech $f(x)$ będzie funkcją $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ oraz $h(x)$ będzie funkcją $h\colon (c,d) \to \mathbb{R}$. Nieh obie funkcje będą ciągłe przy czym $h(y) \neq 0$ dla każdego $y \in (c,d)$.
Przedziały (a,b) i (c,d) mogą być skończone lub nieskończone.

Definicja

Równanie różniczkowe:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{h(y)} \qquad (1)$$

o funkcji niewidomej $y(x)$, nazywamy równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych.

Równanie (1) można także zapisać w postaci:

$h(y) \cdot y' = f(x)$ (2) lub w postaci różniczkowej:

$$h(y)\,dy = f(x)\,dx \qquad (3)$$

Postać (3) uwidacznia rozdzielenie zmiennych.

Całkując obustronnie równanie (3) otrzymujemy:

$$\int h(y)\,dy = \int f(x)\,dx + C$$

Przykład 1

Znaleźć całkę ogólną równania $\dfrac{dy}{dx} = e^{-y}\cos 2x$

Rozwiązanie

Tu $f(x) = \cos x$ zaś $h(y) = e^y$.

Rozdzielamy zmienne x i y (mnożymy przez $e^y\,dx$)pisząc równanie w postaci:

$$e^y\,dy = \cos 2x\,dx \qquad (4)$$

a następnie całkując obustronnie znajdujemy całkę ogólną w postaci:

$$e^y = \frac{1}{2}\sin 2x + C \qquad (5)$$

Gdyby był podany w zadaniu warunek początkowy $y(0) = 0$, to do równania (5) podstawiamy $x = 0$ i $y = 0$ i otrzymujemy:

$1 = \dfrac{1}{2}\sin 2 \cdot 0 + C$. Stąd mamy $C = 1$.

Zatem całką szczególną równania (4) przy warunku początkowym $y(0) = 0$ jest:

$e^y = \dfrac{1}{2}\sin 2x + 1$ lub w postaci jawnej po zlogarytmowaniu obu stron:

$$y = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2x\right) \qquad (6)$$

Przykład 2 Znaleźć krzywą całkową równania $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$ (7) przechodzącą przez punkt $(1, 1)$.

Rozwiązanie

Rozdzielając zmienne (mnożymy równanie przez $y\,dx$) otrzymamy:

$$y\,dy = -2x\,dx$$

Po obustonnym scałkowaniu mamy:

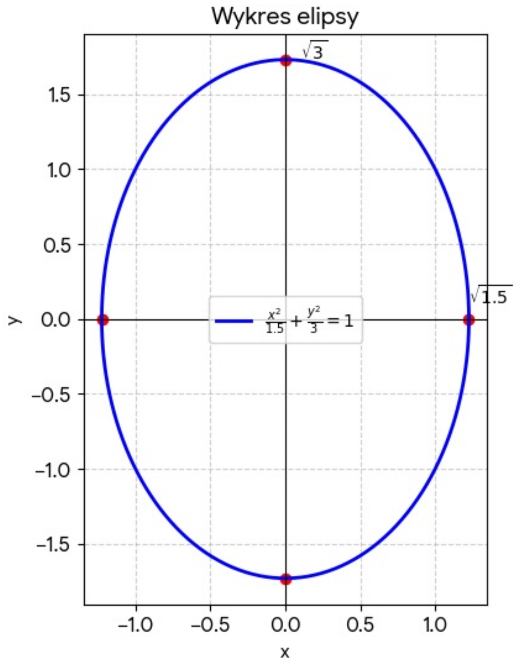
$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C \text{ albo } x^2 + \frac{y^2}{2} = C \qquad (8)$$

Równanie (8) dla każdego C przedstawia elipsę.

Górny (dla $y > 0$) i dolny (dla $y < 0$) łuk każdej z tych elips jest wykresem funkcji spełniającej równanie (7). Uwzględniając warunek początkowy $y(1) = 1$ otrzymamy $C = \frac{3}{2}$.

Zatem szukaną krzywą całkową jest elipsa o równaniu:

$\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$. (Do równania (8) podstawiono $C = \frac{3}{2}$ i podzielono obustronnie przez $\frac{3}{2}$).



Rys. 1. Elipsa - rozwiązanie w przykładzie 2

Równania jednorodne

Niech $f(u)$ będzie funkcją określoną i ciągłą w przedziale (a, b) spełniającą w nim warunek $f(u) \neq u$.

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu:

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \qquad (9)$$

o funkcji niewiadomej $y(x)$ nazywamy równaniem różniczkowym jednorodnym.

Równanie to można za pomocą podstawienia:

$$u(x) = \frac{y}{x} \qquad (10)$$

sprowadzić do równania o zmiennych rozdzielonych.

Bo $\frac{dy}{dx} = f(u(x))$, ale $y = x \cdot u(x)$ więc $\frac{dy}{dx} = u(x) + x \cdot \frac{du}{dx}$.

Zatem $u + x \cdot \frac{du}{dx} = f(u)$ czyli $x \cdot \frac{du}{dx} = f(u) - u$.

Ostatecznie:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u} \qquad (11)$$

Równanie (11) jest już równaniem o zmiennych rozdzielonych.

Przykład 3 Znaleźć całkę ogólną równania:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$ co można inaczej zapisać jako $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$

Rozwiązanie

Podstawiając $u = \frac{y}{x}$ otrzymamy:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + u \qquad (12)$$

Ponieważ $y = x \cdot u$, więc $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \qquad (13)$

Lewe strony (12) i (13) są takie same, więc prawe strony także.

Mamy zatem $1 + u = u + x \cdot \frac{du}{dx}$ czyli:

$$x \cdot \frac{du}{dx} = 1 \qquad (14)$$

Rozdzielając zmienne otrzymamy $du = \frac{dx}{x}$

Całkując obustronnie otrzymujemy: $u = \ln|x| + C$

Ponieważ $u = \frac{y}{x}$, zatem ostatecznie otrzymujemy:

$y = x \cdot \ln|x| + C$.

Równania różniczkowe Bernouliego

Niech dane będą funkcje $p(x)$ i $q(x)$ ciągłe w pewnym przedziale (a, b) oraz dowolna liczba rzeczywista r.

Definicja

Równanie różniczkowe pierwszego rzędu:

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot y + q(x) \cdot y^r \qquad (15)$$

nazywamy równaniem różniczkowym Bernouliego.

Gdy $r = 0$, równanie (15) jest równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym (będzie później). Gdy $r = 1$, równanie (15) jest równaniem liniowym jednorodnym.

Załóżmy więc, że $r \neq 0$ i $r \neq 1$. Wtedy równanie (15) nie jest równaniem liniowym dla funkcji niewiadomej y. Można je jednak sprowadzić do równania liniowego ze względu na inną funkcję niewiadomą. W tym celu korzystamy z podstawienia:

$$z = y^{1-r} \qquad (16)$$

przy czym zakładamy, że $(y(x))^{1-r}$ jest określona na przedziale (a, b). Różniczkując (16) względem x, mamy:

$$\frac{dz}{dx} = (1-r) \cdot y^{-r} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (17)$$

Mnożąc obustronnie równanie (15) przez $(1-r) \cdot y^{-r}$ otrzymamy:

$$(1-r) \cdot y^{-r} \cdot \frac{dy}{dx} = (1-r) \cdot p(x) \cdot y^{1-r} + (1-r) \cdot q(x)$$

Stąd na podstawie (16) i (17) otrzymujemy:

$$\frac{dz}{dx} = (1-r) \cdot p(x) \cdot z + (1-r) \cdot q(x) \qquad (18)$$

Zatem jeśli $y(x)$ jest rozwiązaniem równania (15), to funkcja $z(x)$ określona wzorem (16) jest rozwiązaniem równania (18).

Mnożąc obustronnie równanie (18) przez $\dfrac{y^r}{1-r}$ oraz korzystając z (16) otrzymamy równanie (15)

Oznacza to, że jeżeli funkcja $z(x)$ jest rozwiązaniem równania (18), to funkcja $y(x)$ spełniająca związek (16) jest rozwiązaniem równania (15)

Równanie (18) jest równaniem liniowym.

Przykład 4 Znaleźć całkę ogólną równania Bernouliego:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \cdot y - \frac{\ln x}{x} \cdot y^2 \qquad (19)$$

Rozwiązanie

Tu $r = 2$, więc podstawienie $z = y^{1-r}$ ma postać $z = \dfrac{1}{y}$.

Zgodnie z równaniem (18) równanie (19) zastępujemy równaniem liniowym:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \cdot z - \frac{\ln x}{x} \qquad (20)$$

Rozwiązanie równania jednorodnego ma postać $y = C \cdot x$ gdzie C jest dowolną stałą. Jest tak dlatego, że równaie jednorodne jest postaci $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{x} \cdot z$ co po rozdzieleniu zmiennych daje $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dx}{x}$. Otrzymujemy stąd $\ln|z| = \ln|x| + \ln C$.

Czyli $\ln|z| = \ln|Cx|$. Zatem $z = Cx$.

Stosując uzmiennienie stałej C przyjmiemy $z = C(x) \cdot x$

Obliczamy $z' = C'(x) \cdot x + C(x)$ i zgodnie z (20 piszemy:

$$C'(x) \cdot x + C(x) = \frac{1}{x} \cdot C(x) \cdot x - \frac{\ln x}{x}$$

Stąd otrzymujemy $C'(x) = -\dfrac{\ln x}{x^2}$

Całkując otzrymamy $C(x) = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x} + C_1$

Zatem wzór $z = C_1 x + \ln x + 1$ przedstawia rozwiązanie równania (20)
a wzór $y = \dfrac{1}{C_1 x + \ln x + 1}$ przedstawia całkę równania (19).